$a^2 + b^2 = c^2$

Frazioni e calcolo letterale

Vediamo di riprendere le operazioni che coinvolgono le frazioni, generalizzandole al caso in cui alcuni numeri sono rappresentati da lettere. Le tecniche di calcolo ovviamente sono quelle già viste.

Semplificazione di frazioni

Possiamo semplificare le frazioni grazie alla proprietà invariantiva della divisione:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Semplificare una frazione significa dividere il numeratore e il denominatore per un fattore comune.
Alcuni esempi:

$$\frac{14}{21} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{3} \qquad \frac{2a}{3a} = \frac{2 \cdot a}{3 \cdot a} = \frac{2}{3} \qquad \frac{6x^3b}{3ax} = \frac{3 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x \cdot b}{3 \cdot a \cdot x} = \frac{2x^2b}{a}$$

Vediamo ora di semplificare la frazione $\frac{ab + a^2}{7a}$

A prima vista la frazione sembra ridotta ai minimi termini, ma in realtà non lo è. In questi casi torna utile una tecnica chiamata "**messa in evidenza**". Questa tecnica si basa sulla proprietà distributiva. Si è soliti distribuire i fattori, mentre qui al contrario li si estrapola mettendoli appunto "in evidenza":

$$\frac{ab + a^2}{7a} = \frac{a \cdot (b + a)}{7a} = \frac{b + a}{7}$$

Mettendo in evidenza la a si nota che essa è un fattore comune a numeratore e denominatore e che si può quindi semplificare la frazione.

Altri esempi:

$$\frac{8 + 4x}{4} = \frac{4 \cdot (2 + x)}{4} = 2 + x \qquad \frac{3x^3 - 6x^2 + 12x}{3ax} = \frac{3x \cdot (x^2 - 2x + 4)}{3ax} = \frac{x^2 - 2x + 4}{a}$$

Addizione e sottrazione

Per svolgere queste operazioni si lavora con la tecnica del denominatore comune. Alcuni esempi:

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+2\cdot a}{5a}=\frac{15+2a}{5a} \qquad \frac{2}{b^2}+\frac{a}{2b}=\frac{2\cdot 2+a\cdot b}{2b^2}=\frac{4+ab}{2b^2}$$

Moltiplicazione e divisione

Anche qui si opera nei modi già visti, semplificando quando ci sono fattori comuni a numeratore e denominatore.

$$-\frac{2x^2}{y}\cdot\frac{3ay^2}{5x}=-\frac{2x}{1}\cdot\frac{3ay}{5}=-\frac{6axy}{5} \qquad \frac{ab}{c^2}:\frac{2a}{7c}=\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{7c}{2a}=\frac{7b}{2c}$$

Osserva ora l'uguaglianza:

$$-\frac{3}{2}a=-\frac{3a}{2}=\frac{-3a}{2}=\frac{3a}{-2}=-a\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\cdot(-a)=3a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{2}\cdot 3=(3\cdot a):(-2)$$

Puoi verificare l'uguaglianza applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione e la tecnica di moltiplicazione tra frazioni.
Prova a capire ogni singola situazione!

Un'altra considerazione importante

La linea di frazione svolge anche indirettamente la funzione di parentesi che "protegge" ciò che sta a numeratore e a denominatore. Alcuni esempi:

$$-\frac{a+2}{3}=-\left(\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\right)=-\frac{a}{3}-\frac{2}{3} \qquad -\frac{x-y+2}{2x}=-\left(\frac{x}{2x}-\frac{y}{2x}+\frac{2}{2x}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{y}{2y}-\frac{1}{x}$$

Puoi capire bene questa situazione con un esempio numerico:

$$-\frac{5+2}{3}=-\frac{7}{3}=-\left(\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\right)=-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{7}{3}$$